Révisions

Séries ; Régularité ; Complexes ; Géométrie

1) Séries

Exercice 1 Montrer que $\sum \frac{n}{2^n}$ et $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ convergent.

Exercice 2 Discuter, en fonction de $\lambda > 0$, de la nature de $\sum \frac{\lambda^n}{1+\lambda^n}$.

Exercice 3 Nature de $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.

Exercice 4
1. Montrer que $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ à déterminer.
2. Étudier la convergence et la convergence absolue de $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

Exercice 5 Discuter, en fonction de $x \in \mathbb{R}$ de la nature de $\sum H_n x^n$, où H_n est la série harmonique.

Exercice 6 Soit $\sum a_n$ une série convergente. Montrer que $\sum a_n \cos(x/n)$ converge.

Exercice 7 ★ Soit (u_n) positive décroissante de limite nulle. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature

Exercice 8 ★ On note S l'ensemble des suites croissantes à termes dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

1. Pour $a \in S$, montrer que $\varphi(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k}\right)$ appartient à $]0, 1]$.
2. Montrer que φ définit une bijection de S sur $]0, 1]$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in S$ pour que $\varphi(a) \in \mathbb{Q}$.

2) Régularité

Exercice 9 Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.

Exercice 10 Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé à racines simples, P' l'est aussi. Que dire si P est scindé ?

Exercice 11 Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral, pour f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Exercice 12 On pose $f(x) = e^{-1/x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$, et $f(0) = 0$.

1. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x^2}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Puis que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. ★ Montrer que f n'est solution sur $\mathbb{R}$ d'aucune équation différentielle de la forme $y' = a(x)y$ avec $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
4. ★ Montrer que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13
1. Énoncer la définition de l'uniforme continuité d'une fonction.
2. Justifier brièvement que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est UC. Donner un exemple d'une fonction non uniformément continue.
3. Montrer que si f est continue, $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$

Exercice 14 Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On note E_d l'ensemble des polynômes unitaires de degré d de $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_d \in E_d$ tel que $\forall\theta \in \mathbb{R},\ \cos(d\theta) = 2^{d-1}T_d(\cos\theta)$.
2. Déterminer les racines réelles de T_d, puis sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
3. ★ Montrer que $\|P\|_{[-1,1],\infty} \geq \frac{1}{2^{d-1}}$ pour tout $P \in E_d$. Cas d'égalité ?

3) Complexes & Géométrie

Exercice 15
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = e^{i\frac{\pi}{3}}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1$.

Exercice 16 Soit $\theta \in [0, \pi]$. Soient A et B du cercle unité de $\mathbb{R}^2$ tels que $(\widehat{OA, OB}) = \theta$. Exprimer l'aire de la lunule constituée des points extérieurs au disque unité et intérieurs au disque de diamètre $[AB]$.

Exercice 17 Que dire de $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2025} \in \mathbb{C}$ des 2025-ièmes de l'unité vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{2025} \lambda_i = 2025$?

Exercice 18 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f admet un extremum en $a \in \mathbb{R}^n$. Rappeler la valeur de $\nabla f(a)$ (avec démonstration).

Exercice 19 Déterminer le maximum de la fonction $f\colon x \mapsto 3\cos x + 4\sin x$. Justifier.

Exercice 20 Soit $\theta_1 < \theta_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et $C = \{z \in \mathbb{C} \mid \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\}$. Montrer que C est stable par addition.

Exercice 21 ★ Existe-t-il $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue telle que :

- f s'annule un nombre fini de fois sur chaque droite verticale,
- f s'annule un nombre infini de fois sur toutes les autres droites ?

Exercice 22 ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_n = \{(x, y) \in (\mathbb{Q}^*)^2 \mid x^2 + y^2 = n\}$.

1. Montrer que C_1 est non vide.
2. Montrer que C_7 est vide.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que C_n est non vide. Montrer que C_n est infini.